# Lógica Matemática

## 17 *Teorema da Adequação para $\mathcal{L}$* ■

# Adequação

Neste vídeo, demonstraremos o resultado metamatemático talvez mais importante para a lógica proposicional formal, que é o *teorema da adequação*.

O teorema da adequação afirma que uma fórmula de $\mathcal{L}$ é uma tautologia se e somente se é um teorema de $\mathcal{L}$.

Este teorema nos diz que, para o sistema $\mathcal{L}$, as noções de *prova* (noção sintática) e *tautologia* (noção semântica que captura a ideia de verdade) coincidem.

# Relembrando... Valoração

Uma valoração de $\mathcal{L}$ é uma função $v$, cujo domínio é o conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}$ e cuja imagem é o conjunto $\{V, F\}$ , tal que, para quaisquer fórmulas $A$ e $B$ de $\mathcal{L}$:

$a)\ \ v(A) \neq v(\neg A)$

$b)\ \ v(A \rightarrow B) = F$ se e somente se $v(A) = V$ e $v(B) = F$

TEOREMA 1: Se $\mathcal{L}^*$ é um extensão consistente de $\mathcal{L}$, então existe uma valoração em que cada teorema de $\mathcal{L}^*$ assume o valor lógico V.

*Demonstração:*

Definimos uma valoração $v$ sobre as fórmulas de $\mathcal{L}$ da seguinte maneira:

- $v(A) = V$ se e somente se $\vdash_J A$,
- $v(A) = F$ se e somente se $\vdash_J (\neg A)$,

em que $J$ é uma extensão consistente e completa de $\mathcal{L}^*$ (que existe pelo resultado do vídeo anterior).

Como $J$ é consistente, então, para toda fórmula $A$, não podem ocorrer simultaneamente $\vdash_J A$ e $\vdash_J (\neg A)$. Logo, $v(A) \neq v(\neg A)$.

*Demonstração:*

Temos que verificar agora o item:

$v(A \to B) = F$ se e somente se $v(A) = V$ e $v(B) = F$.

(VOLTA) Suponha que $v(A) = V$ e $v(B) = F$ mas que $v(A \to B) = V$.

Assim, pela nossa definição inicial,

- $\vdash_J A$
- $\vdash_J (\neg B)$ e
- $\vdash_J (A \to B)$

Por MP, obtemos $B$, logo, $\vdash_J B$, contrariando o fato de $J$ ser consistente.

Portanto, $v(A) = V$ e $v(B) = F$ implicam que $v(A \to B) = F$.

*Demonstração:*

Temos que verificar agora o item:

$v(A \to B) = F$ se e somente se $v(A) = V$ e $v(B) = F$.

(IDA) Suponha que $v(A \to B) = F$ e que $v(A) = F$ ou $v(B) = V$. Assim:

- $\vdash_J \left(\neg(A \to B)\right)$
- $\vdash_J (\neg A)$ ou $\vdash_J B$

O axioma L1 de $\mathcal{L}$ diz que $\left(G \to (H \to G)\right)$.

Assim, $\vdash_J \left(\neg A \to (\neg B \to \neg A)\right)$ e $\vdash_J \left(B \to (A \to B)\right)$.

Por MP, $\vdash_J (\neg B \to \neg A)$ ou $\vdash_J (A \to B)$.

Em ambos os casos, contradizemos o fato de $J$ ser consistente.

TEOREMA 1: Se $\mathcal{L}^*$ é um extensão consistente de $\mathcal{L}$, então existe uma valoração em que cada teorema de $\mathcal{L}^*$ assume o valor lógico V.

*Demonstração:*

Portanto, demonstramos que $v$ cumpre os requisitos de uma valoração.

Seja $A$ um teorema de $\mathcal{L}^*$.

Então, $\vdash_J A$, uma vez que $J$ é uma extensão de $\mathcal{L}^*$.

Logo, pela construção de $v$, $v(A) = V$. ■

Estamos agora em condições de demonstrar o teorema da adequação.

Mas antes, recapitulemos os principais resultados.

# Principais resultados

- Vídeo 13 – Teorema da corretude: Todo teorema de $\mathcal{L}$ é uma tautologia.

- Vídeo 15 – TEOREMA 1: Seja $\mathcal{L}^1$ uma extensão consistente de $\mathcal{L}$ e $A$ uma fórmula de $\mathcal{L}$ que não é teorema de $\mathcal{L}^1$. Então, o sistema $\mathcal{L}^2$, que é uma extensão de $\mathcal{L}$ obtida de $\mathcal{L}^1$ incluindo-se a fórmula $(\neg A)$ como axioma adicional, é consistente.

- Nesse vídeo – TEOREMA 1: Se $\mathcal{L}^*$ é um extensão consistente de $\mathcal{L}$, então existe uma valoração em que cada teorema de $\mathcal{L}^*$ assume o valor lógico V.

# Teorema da Adequação

TEOREMA 2 (da adequação): Seja $A$ uma fórmula de $\mathcal{L}$. Então, $A$ é teorema de $\mathcal{L}$ se, e somente se, $A$ é uma tautologia.

*Demonstração:*

(IDA) Pelo teorema da correção, já temos que todo teorema de $\mathcal{L}$ é uma tautologia.

Falta demonstrar que toda tautologia é teorema de $\mathcal{L}$.

(VOLTA) Seja $A$ uma tautologia. Vamos supor que $A$ não é teorema de $\mathcal{L}$.

Dessa maneira, a extensão $\mathcal{L}^*$ obtida de $\mathcal{L}$ acrescentando-se $(\neg A)$ como axioma adicional é consistente (vídeo 15).

# Teorema da Adequação

TEOREMA 2 (da adequação): Seja $A$ uma fórmula de $\mathcal{L}$. Então, $A$ é teorema de $\mathcal{L}$ se, e somente se, $A$ é uma tautologia.

*Demonstração:*

Pelo teorema 1 deste vídeo, deve existir uma valoração $v$ tal que todo teorema de $\mathcal{L}^*$ assume o valor V.

Logo, em particular, temos que $v(\neg A) = V$, o que é uma contradição, pois, por hipótese, $A$ é uma tautologia, isto é, $v(A) = V$.

Portanto, se $A$ é uma tautologia, deve ser teorema de $\mathcal{L}$. ■

# Consequência imediata: Decidibilidade

<u>Consequência imediata:</u> O sistema $\mathcal{L}$ é decidível, isto é, existe um procedimento efetivo para determinar se uma dada fórmula de $\mathcal{L}$ é teorema de $\mathcal{L}$.

*Demonstração*:

Dada uma fórmula qualquer, basta construirmos sua tabela verdade (o que pode ser feito em um tempo finito) .

Se a fórmula for uma tautologia, então, pelo teorema da adequação, ela é teorema de $\mathcal{L}$. ■

# Observações finais

Terminamos a parte da série sobre lógica proposicional.

Demonstramos a principal propriedade do sistema $\mathcal{L}$, que é o fato de que ele demonstra precisamente aquelas formulas que são consideradas logicamente verdadeiras (tautologias).

Portanto, os axiomas e regras de dedução de $\mathcal{L}$, nesse contexto, capturam corretamente a noção de dedução lógica.

Após uma breve pausa, daremos continuidade ao estudo da lógica matemática examinando a chamada lógica de predicados (também chamada de lógica de primeira ordem).

# 17 *Teorema da Adequação para $\mathcal{L}$* ■

numeroimaginario.com.br
vinicius@numeroimaginario.com.br